



# Physique 3: AP33-2 Electromagnétisme Filière AP2 (S3)

**ZARROUK Tarik**

École Nationale des Sciences  
Appliquées d'Al Hoceima

2020-2021

- **Chapitre 0: Notions mathématiques : Introduction à l'électromagnétisme**
- **Chapitre I : Régime variable**
- **Chapitre II : Equation de Maxwell**
- **Chapitre III: Ondes électromagnétiques**

## ❖ Références

---

- Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : ***Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, tome 1.*** Addison Wesley, seconde édition, 1994.
- Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goéry Delacôte : ***Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, tome 2.*** Addison Wesley, seconde édition, 1994.
- Tamer Becherrawy - **Electromagnetism\_ Maxwell Equations, Wave Propagation and Emission** (2012, Wiley-ISTE)

## ❖ Introduction à l'électromagnétisme

---

L'**électromagnétisme** est le domaine de la physique qui s'intéresse à l'ensemble des phénomènes électriques et des phénomènes magnétiques. Ses lois généralisent celles de l'**électrostatique** et de la **magnétostatique** qui décrivent le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ . dans des situations où ces champs sont statiques, c'est-à-dire ne dépendent pas du temps. Lorsqu'ils en dépendent, de nouveaux phénomènes physiques se manifestent. En particulier, la variation temporelle d'un champ magnétique agit comme une source de champ électrique. C'est le phénomène **d'induction électromagnétique**. De même, la variation temporelle d'un champ électrique fait apparaître un champ magnétique. L'électromagnétisme a pour objet l'étude de ces effets. On regroupe aussi dans ce domaine les phénomènes de conduction électrique.

## ❖ Introduction à l'électromagnétisme

---

L'électromagnétisme est fondé sur les équations de Maxwell, un ensemble de quatre équations décrivant le champ magnétique et le champ électrique. Ces équations s'écrivent avec des opérateurs vectoriels, des objets mathématiques qui peuvent sembler effrayants à première vue mais qu'il convient de ne considérer que comme des outils mathématiques comme les autres.

Ces équations furent écrites pour la première fois sous leur forme complète en 1861 par James Maxwell (1831–1879). La première conséquence fondamentale fut la prédiction de l'existence puis la découverte d'un nouveau type d'ondes, dans lesquelles un champ électrique et un champ magnétique évoluent de façon couplée. On les appelle des ondes électromagnétiques.

# ❖ Introduction à l'électromagnétisme

---

## QUELQUES DATES HISTORIQUES

- **1784** Charles A. **Coulomb** (France) ; loi des forces électriques.
- **1819** Découverte de l'action magnétique d'un courant par **Oersted** (Danemark) : un courant électrique peut générer un champ magnétique.
- **1820 Biot et Savart** (France) : loi de création d'un champ magnétique par un courant.
- **1820** Pierre-Simon **Laplace** (France) : loi d'interaction entre courant électrique et champ magnétique.
- **1831** Michael **Faraday** (Angleterre) : principe de l'induction électromagnétique.  
**Lenz** (Allemagne) et **Henry** (USA) loi de lenz.
- **1865** James Maxwell élabore une théorie unifiée qui donne naissance à l'**électromagnétisme**

## Sujet dans lesquels l'électromagnétisme est pertinent:

- Télécommunications
- Antennes
- Composants hyperfréquences et millimétriques
- Machine électriques
- Diffraction et Diffusion
- Optique
- Médecine
- Imagerie, Télédétection
- Radars, Capteurs
- Distribution de puissance
- Propagation d'ondes
- Caractérisation des matériaux

# ❖ Chapitre 0 : Notions mathématiques

---

## 1. Notion de champ

Un champ est une quantité qui prend une valeur en chaque point de l'espace, c'est une fonction de la position.

De manière générale, lorsqu'on associe à tout point  $M(x,y,z)$  d'un milieu, une valeur  $U(M,t)$  d'une grandeur physique, on dit qu'on a défini un champ de cette grandeur physique.

- Un **champ** est dit **uniforme** dans une région donnée  $D$  si la grandeur définissant ce champ a la même valeur en chaque point de cette région :

$$U(M, t) = U(t) \quad \forall M \in D$$

- Un **champ** est dit **stationnaire** (ou **permanent**) si la grandeur définissant ce champ ne dépend pas du temps :

$$U(M, t) = U(M) \quad \forall M \in D \quad \forall t$$



- **Champ scalaire**

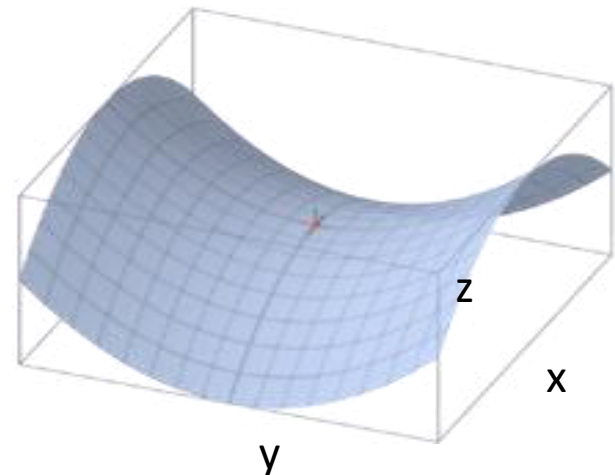
C'est une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (ou scalaire) à chaque point de l'espace. Les champs scalaires sont souvent utilisés en physique, par exemple pour indiquer la distribution de la température à travers l'espace, ou de la pression atmosphérique.

La fonction  $f(M)$  est dite fonction scalaire de point du champ scalaire si  $f(M) = f(x, y, z)$

### Exemple

Il existe différentes manières de représenter un champ scalaire selon son application : coloriage du plan , équipotentielles, graphe 3D ...

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto z = x^2 - y^2 \end{array}$$



- **Champ vectoriel ou champ de vecteur**

C'est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien.

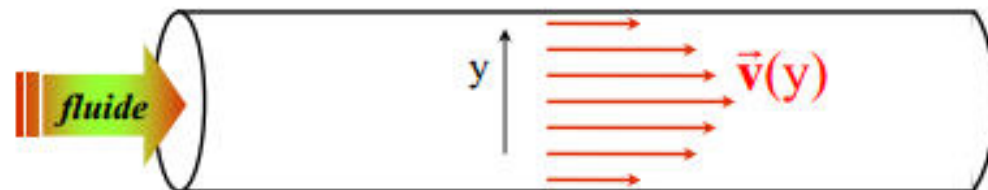
$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z) \vec{e}_x + v_y(x, y, z) \vec{e}_y + v_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

Les champs de vecteurs modélisent par exemple la vitesse et la direction d'un fluide en mouvement dans l'espace, ou la valeur et la direction d'une force, comme la force magnétique ou gravitationnelle, qui évoluent points par points.

Tout champ vectoriel peut être représenté par des lignes de champs qui permettent de visualiser son orientation, son sens et son intensité.

### Exemple

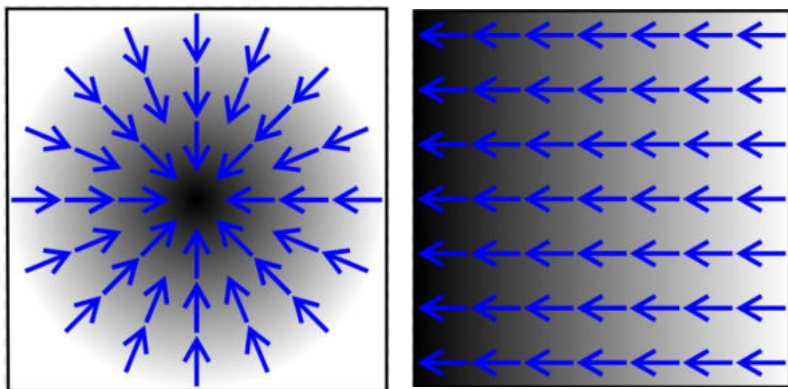
(vitesse dans un écoulement, force de gravitation, champ électrique ou magnétique, etc.).



# 1. Gradient d'un champ scalaire

le gradient (noté  $\overrightarrow{grad}$ ) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant les dérivées partielles de  $f(M)$   
Par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$



Les gradients sont les flèches bleues qui indiquent là où la fonction croît le plus. Les valeurs vont du blanc (valeur faible) à noir (valeur élevée).

Représentation du gradient d'un champ scalaire

## Application

Calculer le gradient du champ scalaire de la fonction

$$\varphi = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + xy + 2x - 7z \text{ en point } A(0,0,0) \text{ et } B(1,2,1)$$

Réponse :

$$\text{on a } \varphi = x^2 + 2y^2 + \cancel{2x} + 5z^2 + xy + 2x - 7z$$

$$\text{ona } \vec{\text{grad}}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + y + 2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y + x \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 10z - 7$$

$$\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} 2x + y + 2 \\ 4y + x \\ 10z - 7 \end{pmatrix}$$

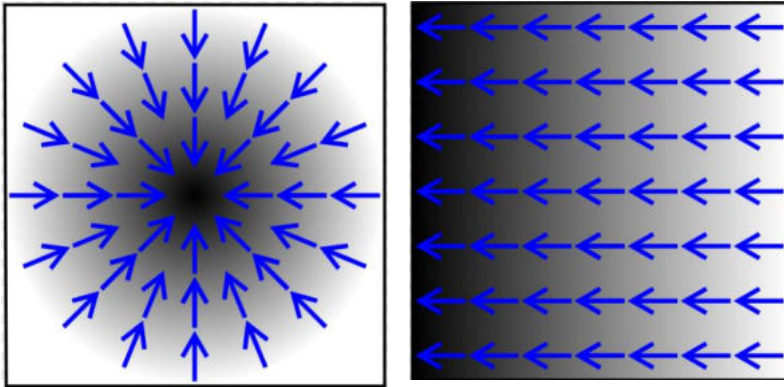
$$\text{Au point } A \quad (\text{grad } \varphi)_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Au point } B \quad (\text{grad } \varphi)_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## 2. Divergence d'un champ vectoriel

L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure, pour faire simple, si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace.

### Exemple:



L'opérateur divergence va permettre de calculer, localement, la variation de ce gradient de couleur

La divergence (noté  $\text{div}$ ) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle  $\vec{v}(M)$  de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par:

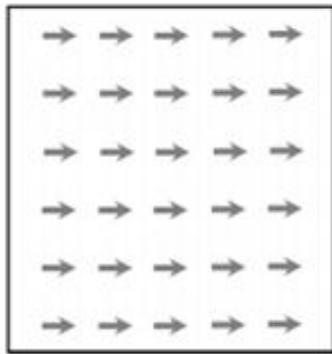
$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

### 3. Rotationnel d'un champ vectoriel

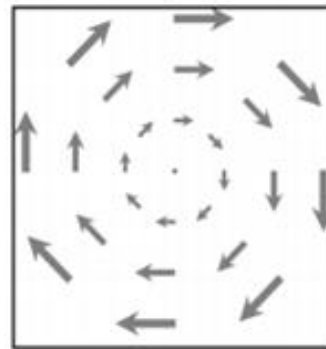
le rotationnel est un opérateur qui prend un champ vectoriel en entrée et qui renvoie un vecteur.

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel (noté  $\overrightarrow{rot}$ ) d'un champ vectoriel est définie par:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$



$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \vec{0}$  - champ « irrotationnel »



$\overrightarrow{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$

- Champ « tourbillonnant »
- Le champ résultant est Perpendiculaire au plan du Tourbillon (comme l'axe d'une Toupie),

#### Application:

Calculer le rotationnel du champ vectoriel  $\vec{a} = \left( \frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y} \right)$  au point M (1,2,-2).

Réponse : on a  $\vec{a} = \frac{y}{z} \vec{i} + \frac{z}{x} \vec{j} + \frac{x}{y} \vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{a}) &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{x} \right) \right] \vec{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \vec{j} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{z} \right) \right] \vec{k} \\ &= \left[ -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \right] \vec{i} + \left[ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \right] \vec{j} + \\ &\quad \left[ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \right] \vec{k}\end{aligned}$$

~~au point~~

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left( -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}, -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}, -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \right)$$

au point M : on a M(1, 2, -2)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a})_M = \left( -\frac{1}{4} - 1, -\frac{2}{4} - \frac{1}{2}, \frac{2}{1} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a})_M = \left( -\frac{5}{4}, -1, \frac{5}{2} \right)$$

## 4. Laplacien scalaire

Le **Laplacien** scalaire d'une fonction scalaire de point (noté ***lap*** ou  $\Delta$ ) est par définition un champ scalaire défini par:

$$\Delta f = \operatorname{div} [\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)]$$

Intuitivement, il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.

En coordonnées cartésiennes, le Laplacien se définit comme :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### Application:

Calculer  $\Delta f$  avec  $f(x, y, z) = 3x^2y + 7e^{3y} - 9 \cos z$

Montrer que  $\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$



• calculer  $\Delta f$

on a  $f(x, y, z) = 3xy + 7e^{3y} - 9\cos z$

$$\text{et } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{on } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} 6y$$

$$; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 9\cos z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 63e^{3y}$$

alors  $\Delta f = 6y + 63e^{3y} + 9\cos z$

• on montre que  $\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$

$$\text{on a } \vec{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## 5. Laplacien vectoriel

Le Laplacien vectoriel (noté  $\vec{\Delta}$ ) d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  est un champ vectoriel défini par:

$$\vec{\Delta}\vec{v} = \overrightarrow{grad}[div(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\vec{v})]$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, **le Laplacien vectoriel a pour composantes:**

$$\vec{\Delta}\vec{v} \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Exemple:

Le laplacien vectoriel est présent en particulier :

- en [électromagnétisme](#) ;
- en mécanique des fluides visqueux
- dans la formule du [rotationnel du rotationnel](#) (qui est à l'origine de son irruption en électromagnétisme).

## 6. Opérateur Nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur **nabla** et défini par:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes:

- **Le gradient** d'un champ scalaire  $f$  est noté

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- **La divergence** d'un champ vectoriel est notée

$$\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- **Le rotationnel** d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

- **Le Laplacien scalaire** d'un champ scalaire est noté

$$\Delta f = \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2(f)$$

Avec  $\nabla^2$  se lit « del de »

- **Le Laplacien vectoriel** d'un champ de vecteurs est noté

$$\nabla^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{v})] - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})] = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{v}]$$

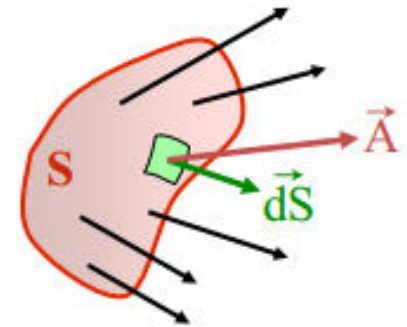
## 7. Théorème de Stokes et Green-Ostrogradsky

### 7.1 Flux d'un champ vectoriel

Le Flux  $\Phi$  d'un champ vectoriel (champ de vecteur)  $\vec{A}$  à travers une surface  $S$  est donné par l'intégrale sur toute la surface  $S$  du produit scalaire de  $\vec{A}$  avec le vecteur  $\vec{dS}$ , représentant un élément de surface infinitésimal.

Le scalaire  $\Phi$  défini par l'intégrale de surface:

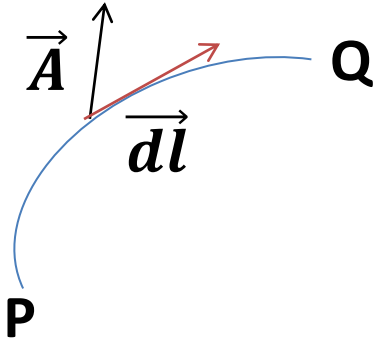
$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{x,y} A(x, y) dx dy$$



$\vec{dS}$ , par convention, est un vecteur orienté vers l'extérieur pour une surface fermée

## 7.2 Circulation d'un champ vectoriel

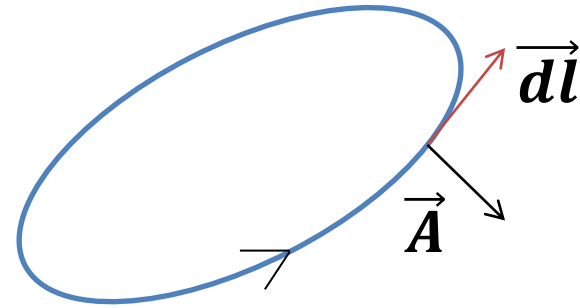
La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  le long d'un chemin est défini par :



$$C(\vec{A}) = \int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{A}$ : le champ de vecteur

$d\vec{l}$ : un élément de contour ou de la ligne

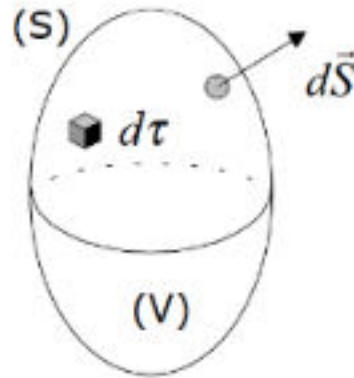


$$C(\vec{A}) = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- La circulation de la force représente le travail de cette force entre le point P et Q.
- La différence de potentiel U est la circulation du champ électrique  $\vec{E}$  le long d'un trajet

## 7.3 Théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky ou théorème de flux-divergence):

Enoncé: Le flux d'un vecteur  $\vec{A}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume  $V$  délimité par la surface  $S$ , avec  $d\tau$  est un élément de volume centré en un point de  $V$



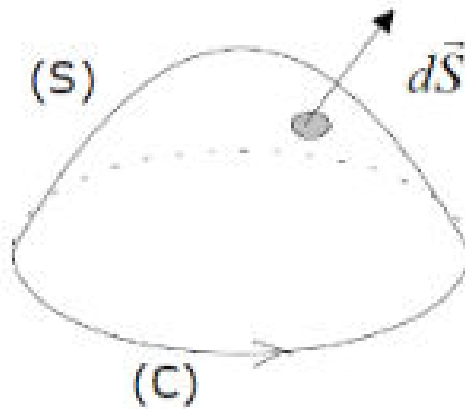
$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

### Interprétation physique

C'est un résultat important en [physique mathématique](#), en particulier en [électrostatique](#) et en [dynamique des fluides](#), où ce théorème reflète une [loi de conservation](#). Selon son signe, la divergence exprime la dispersion ou la concentration d'une grandeur (telle une masse par exemple) et le théorème précédent indique qu'une dispersion au sein d'un volume s'accompagne nécessairement d'un flux total équivalent sortant de sa frontière.

## 7-4 Théorème du rotationnel ( Théorème de Stokes)

Enoncé: la circulation d'un champ de vecteur  $\vec{A}$  le long d'un contour ( C ) est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte (S) s'appuyant sur ce contour



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



## Quelques Formules d'analyse vectorielle.

$$\star \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\star \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\star \overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}} f) = \vec{0}$$

$$\star \text{div}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = 0$$

$$\star \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{A} = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\star \text{div}(f \vec{A}) = \vec{A} \cdot \overline{\text{grad}} f + f \text{div} \vec{A}$$

$$\star \overline{\text{rot}}(f \vec{A}) = f \overline{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \wedge \overline{\text{grad}} f$$

$$\star \overline{\text{grad}}(f g) = g \left( \overline{\text{grad}} f \right) + f \left( \overline{\text{grad}} g \right)$$

$$\star \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overline{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\star \overline{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} +$$

$$(\vec{B} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B}$$

$$\star \overline{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \overline{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A} +$$

$$(\vec{B} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{B}$$

$$\star \overline{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2 \vec{A} \wedge \overline{\text{rot}} \vec{A} + 2(\vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{A}$$

$$\star \Delta(f g) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \overline{\text{grad}} f \cdot \overline{\text{grad}} g$$

### Exercice d'application 1:

Soit M un point de l'espace de coordonnées  $x, y, z$  repéré par le vecteur

Position  $\vec{r} = r\vec{u}$  tel que  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

1- calculer  $\overrightarrow{\text{grad}}(r)$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}(\log r)$

2- calculer  $\text{div}(\vec{r})$ ;  $\text{div}(\vec{u})$  et  $\text{div}\left(\frac{\vec{u}}{r}\right)$

3- calculer  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{r}$  et  $\Delta(r)$

### Exercice d'application 2:

Montrer que le gradient d'un champ scalaire  $U$  est à circulation conservative.

### Exercice d'application 3:

Montrer que le rotationnel d'un champ de vecteur  $\vec{W}$  est un champ à flux conservatif.

Réponse 1 :

① Calcul de  $\vec{\text{grad}}(r)$  :

Rappel :  $\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$$\vec{\text{grad}} r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k}$$

$$\bullet \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2 - 1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}}$$

$$\bullet \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{alors : } \vec{\text{grad}} r = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} = \frac{1}{r} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

$$\text{finalement } \boxed{\vec{\text{grad}} r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}}$$

② Calcul de  $\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$  :

Rappel :  $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$

$$\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} \vec{k}$$

$$\bullet \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\text{alors : } \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k}$$
$$= -\frac{1}{r^3} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

$$\text{Donc } \boxed{\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{u}}{r^2}} \quad \left(\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Rappel :  
 $(f^a)' = a f^{a-1} f'$

•  $\vec{\text{grad}}(\log r) =$   
 $\vec{\text{grad}}(\log r) = \frac{\partial \log r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \log r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \log r}{\partial z} \vec{k}$  (Rappel:  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ )

•  $\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{\partial \log r}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}$

•  $\frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y}{r^2}$  et  $\frac{\partial \log r}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$

Donc:  $\vec{\text{grad}}(\log r) = \frac{x}{r^2} \vec{i} + \frac{y}{r^2} \vec{j} + \frac{z}{r^2} \vec{k} = \frac{1}{r^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

finalement  $\vec{\text{grad}}(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\vec{u}}{r}$

②. Calcule  $\text{div}(\vec{r})$   
 Rappel:  $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

$\text{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1$

alors:  $\text{div}(\vec{r}) = 3$

• Calcule  $\text{div}(\vec{u})$

Rappel:  $\text{div}(\vec{f} \cdot \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\text{grad}} f + f \cdot \text{div} \vec{A}$

$\text{div}(\vec{u}) = \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r} \text{div} \vec{r}$

$= \frac{-\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{1}{r} \cdot 3$

$= -\frac{r^2}{r^3} + \frac{3}{r}$

Alors  $\text{div}(\vec{u}) = -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$

• Calcule  $\text{div}\left(\frac{\vec{u}}{r}\right)$

$\text{div}\left(\frac{\vec{u}}{r}\right) = \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \text{div}(\vec{u})$

$= \vec{u} \cdot \left(\frac{-\vec{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{r}$

$= \frac{-\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{2}{r^2} = -\frac{r^2}{r^3} + \frac{2}{r^2} = -\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2}$

alors  $\text{div}\left(\frac{\vec{u}}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$

3) Calculate  $\text{rot } \vec{r}$

$$\text{on a } \text{rot } \vec{r} = \nabla \wedge \vec{r}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} \vec{e} = \vec{0}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{r} = \vec{0}}$$

• calculate  $\Delta(r)$

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot x + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial x} \\ &= -\frac{x}{r^3} \cdot x + \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

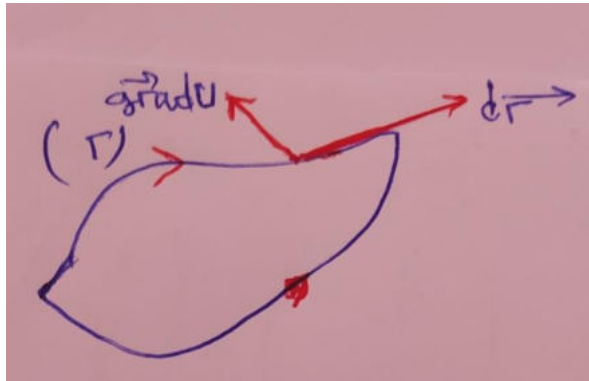
$$\begin{aligned} \text{Donc : } \Delta r &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \\ &= \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3} (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\text{alors } \boxed{\Delta r = \frac{2}{r}}$$

## Solution 2:

Montrons que la circulation de  $\overrightarrow{\text{grad}U}$  entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

Soit un contour fermé  $\Gamma$  sur lequel est défini en tout point  $\overrightarrow{\text{grad}U}$ .



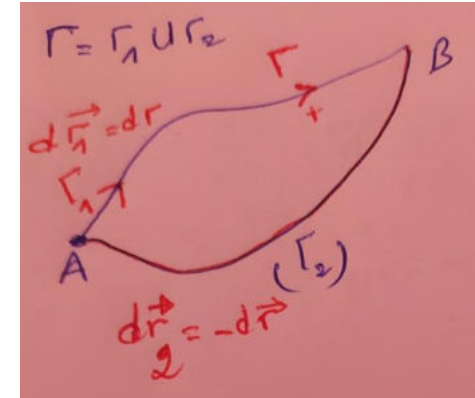
la circulation de ce vecteur le long du contour fermé  $\Gamma$  s'écrit  $\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}U} \cdot \overrightarrow{dr}$

$\overrightarrow{dr}$  représente un déplacement élémentaire le long du contour

Or, par définition  $dU = \overrightarrow{\text{grad}U} \cdot \overrightarrow{dr}$

Donc :  $\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}U} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{\Gamma} dU = 0$ , puisque le contour est fermé.

Soit maintenant deux lignes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  quelconques reliant deux points A et B de l'espace et orientés de A vers B. leur réunion forme un contour fermé  $\Gamma$  le long duquel la circulation du vecteur gradient est nulle.



$$0 = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr} = \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr} + \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr}$$

$$= \oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr_1} + \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{(-dr_2)}$$

D'où en déduit

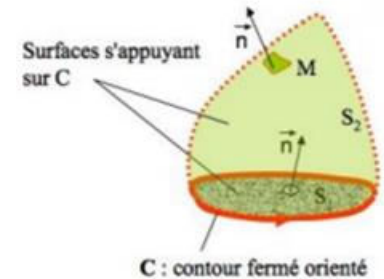
$$\oint_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr_1} = \oint_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}U} \overrightarrow{dr_2}$$

**Conclusion :** la circulation du gradient ne dépend pas du chemin suivi entre les points A et B, c'est donc un vecteur à circulation conservative

### Solution 3

Montrons que le flux de  $\overrightarrow{\text{rot } \vec{W}}$  à travers deux surfaces quelconques s'appuyant sur un même contour est égal.

Soit deux surfaces distinctes  $S_1$  et  $S_2$  s'appuyant sur le contour fermé  $C$ , leur réunion formant une surface  $S$  fermée.



Le flux de  $\overrightarrow{\text{rot } \vec{W}}$  à travers la surface  $S$  s'écrit  $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS}$ ,

Où  $\overrightarrow{dS} = \vec{n} \cdot dS$  représente un élément de surface  $S$  et  $\vec{n}$  sa normale.

De même, le flux de  $\overrightarrow{\text{rot } \vec{W}}$  à travers la surface ouverte  $S_1$  s'écrit  $\oiint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS_1}$

où  $\overrightarrow{dS_1} = \vec{n}_1 \cdot dS$  représente un élément de surface  $S_1$  et  $\vec{n}_1$  la normale respective

d'après la formule d'**Ostrogradsky** :

$$\oiint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \text{div}(\overrightarrow{\text{rot } \vec{W}}) dV$$

Où  $V$  représente le volume délimité par la surface fermée  $S$

On sait que  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot } \vec{W}}) = 0$ . Ceci conduit à  $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$



La surface  $S$  est orientée vers l'extérieur du volume, alors que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont orientées par le contour comme indiqué sur le schéma, avec  $\overrightarrow{dS_1} = \overrightarrow{dS}$  et  $\overrightarrow{dS_2} = -\overrightarrow{dS}$ . D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_S \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} + \oiint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} \\ &= \oiint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} + \oiint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot (-\overrightarrow{dS_2}) \end{aligned}$$

Donc

$$\oiint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot (\overrightarrow{dS_2})$$

**Conclusion:** le flux du rotationnel ne dépend pas de surface ouverte s'appuyant sur le contour  $S$ , c'est donc un vecteur à flux conservatif